

## Diferenciação numérica 2D na modelagem de métodos eletromagnéticos

Carlos Mateus Barriga Nunes, Cícero Régis, CPGf/UFPA.

Copyright 2013, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica.

This paper was prepared for presentation at the 13<sup>th</sup> International Congress of the Brazilian Geophysical Society, held in Rio de Janeiro, Brazil, August 26-29, 2013.

Contents of this paper were reviewed by the Technical Committee of the 13<sup>th</sup> International Congress of The Brazilian Geophysical Society and do not necessarily represent any position of the SBGf, its officers or members. Electronic reproduction or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of The Brazilian Geophysical Society is prohibited.

### Abstract

**Modeling electromagnetic geophysical data usually requires the discretization of the domain where the fields are calculated. In the Finite Element method, the most common discretization cells are triangles. The fields are calculated at the position of the nodes of this mesh of triangles. In many modeling problems, it is necessary to calculate directional derivatives of these fields at the nodes. In this paper we discuss two methods for calculating numerical derivatives that are used in electromagnetic problems. The first method consists in using the average of the derivatives of the finite element basis functions in the elements surrounding the node. The second method is a moving fit by weighted least squares, the weight being defined by a Gaussian function. As a model problem, we apply these methods to the solution of a Poisson equation problem, with homogeneous boundary condition. We compare the results from both methods with the analytical solution, through a quantitative measure of the error in each case. We conclude that the moving fit method is both more accurate and faster than the average derivative.**

### Introdução

O cálculo numérico de derivadas é uma tarefa importante na modelagem numérica de Métodos Eletromagnéticos. Por exemplo, na modelagem de dados do método magnetotelúrico 2D, as componentes  $y$  e  $z$  do campo elétrico e magnético são obtidas a partir da derivada das componentes  $x$  dos campos, sendo esta a direção na qual não há variação nas propriedades físicas (Xu, S. Z ; Zhao, S. K, 1987). Sendo assim, depois de obtermos uma solução numérica pelo método dos elementos finitos (MEF), em geral, desejamos recuperar derivas direcionais do campo encontrado em cada nó de uma malha ou em um ponto arbitrário no domínio do problema, seja ele escalar ou vetorial.

A implementação das duas técnicas descritas aqui surge da necessidade cada vez maior da utilização de malha não estruturada para modelar problemas eletromagnéticos por MEF com geometrias mais complexas. Além disso, o uso deste tipo de malha nos permite controlar a densidade local de nós e reduzir o tamanho do sistema de equações a ser resolvido.

Nas secções a seguir é dada uma descrição das técnicas

que serão utilizadas. A primeira consiste basicamente em utilizar as derivadas das funções base. A segunda consiste em um ajuste móvel por mínimos quadrados ponderados (Tabbara, 1994).

O MEF é usado para resolver a equação de Poisson com condições de Dirichlet homogêna (Rijo, 2008). Um dos passos na implementação do MEF é a discretização do domínio. Nesta etapa, utilizamos o software livre Triangle – gerador automático de malha triangular não estruturada (Shewchuk, 2013).

### Média aritmética do gradiente das funções base

Obter as derivadas direcionais em cada nó da malha através da derivada das funções base no elemento consiste em derivar a função  $u^e$

$$u^e(x, z) = \sum_{i=1}^3 u_i^e \Psi_i.$$

Como  $u^e(x, z)$  é a aproximação de  $u(x, z)$  em  $\Omega_e$ , logo,  $\nabla u(x, z) \approx \nabla u^e(x, z)$  para  $(x, z) \in \Omega_e$ , desde que a discretização seja pequena o suficiente, tal que o plano que interpola a solução nos valores nodais possa representar satisfatoriamente  $u(x, z)$ , como ilustra a figura(1),

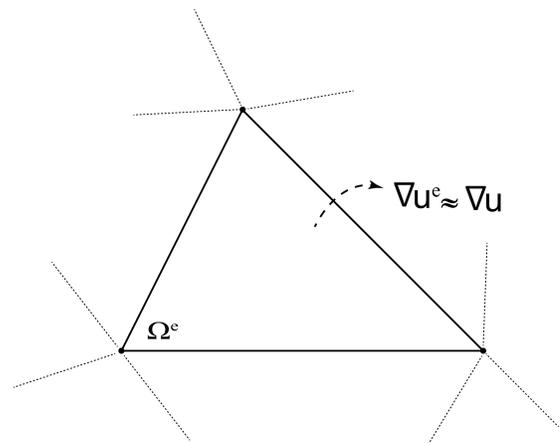


Figure 1: domínio local arbitrário de uma malha hipotética

Uma vez que,

$$\frac{\partial u^e(x, z)}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta^e} \sum_{i=1}^3 b_i u_i^e \quad (1)$$

e

$$\frac{\partial u^e(x, z)}{\partial z} = \frac{1}{2\Delta^e} \sum_{i=1}^3 c_i u_i^e, \quad (2)$$

então para determinar o  $\nabla u_g(x, z)$  em cada nó da malha a partir de (1) e (2), considera-se uma média tomando o gradiente de cada elemento na vizinha do nó (figura (2)).

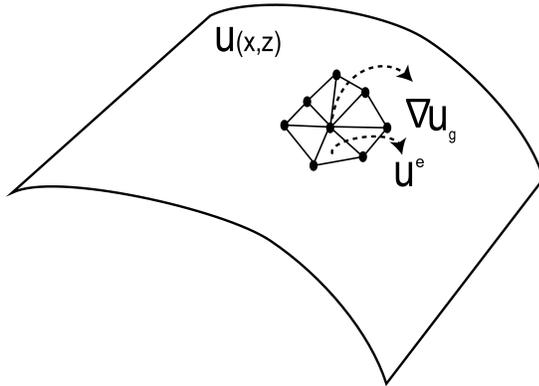


Figure 2: A figura ilustra as interpolações na vizinhança de um nó qualquer da malha onde a derivada será calculada

Portanto,

$$\frac{\partial u_g(x, z)}{\partial x} = \sum_{j=1}^{N_e} \frac{\partial u^e(x, z)}{\partial x} \quad (3)$$

e

$$\frac{\partial u_g(x, z)}{\partial z} = \sum_{j=1}^{N_e} \frac{\partial u^e(x, z)}{\partial z} \quad (4)$$

em que o subscrito  $g$  indica o nó no qual está sendo calculado a derivada direcional e  $N_e$  o número de elementos vizinhos a este nó

### Ajuste móvel por mínimos quadrados ponderados

Primeiramente, considera-se um problema de condições de fronteira com domínio  $\Omega$  e contorno  $\partial\Omega$ , discretizado por elementos finitos. A figura (4) ilustra e reforça a independência da geometria do elemento. Para calcular as derivadas em qualquer ponto da malha por ajuste móvel, define-se um sub-domínio  $\Gamma_g \in \Omega$ , tendo a origem em  $(x_g, z_g)$  e raio  $R_g$ . Nota-se que somente os nós em  $\Gamma_g$  contribuem para o processo de ajuste móvel. Portanto, a idéia é resolver um problema de mínimos quadrados em cada sub-domínio  $\Gamma_g$  utilizando uma função peso (ver figura (3)), dado por (5), Tabbara (1994).

$$w(x, z) = \exp -c^2 \left[ \left( \frac{x_g - x_i}{x_g - x_m} \right)^2 + \left( \frac{z_g - z_i}{z_g - z_m} \right)^2 \right] \quad (5)$$

com  $x_m = \text{Max}|x_i|$  e  $z_m = \text{Max}|z_i|$ , em que  $x_i, z_i (i = 1, \dots, N)$  são os nós no domínio  $\Gamma_g$ .  $w(x, z)$  é uma função continua e positiva que decresce monotonicamente a partir da origem. Nota-se que não há restrições sobre  $(x_g, z_g)$ , mas particularmente para os resultados que serão apresentados, refere-se ao nó da malha onde está sendo calculado a derivada.

Com o intuito de realizar uma ajuste suave no domínio local  $\Gamma_g$ , a solução  $u_e(x, z)$  de elementos finitos interpolada em  $\Gamma_g$  é definida como,

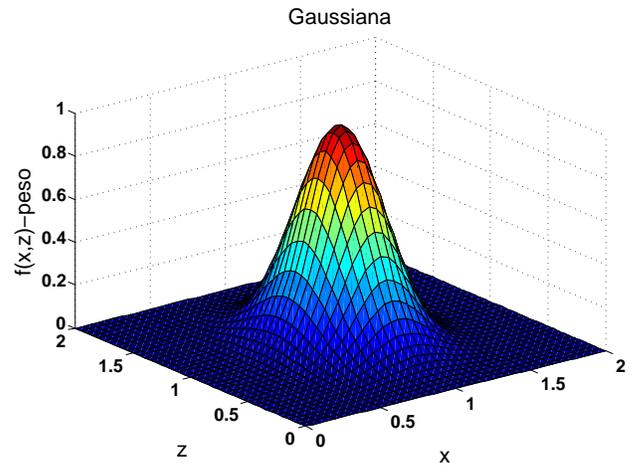


Figure 3: A figura mostra a função peso, em que  $x_g = 1.0, z_g = 1.0, |x_g - x_m| = 0.3$  e  $|z_g - z_m| = 0.4$ . Portanto, o peso é maior na origem onde se está calculando a derivada.

$$u_e^*(x, z) = \mathbf{f}(x, z) \mathbf{a} \quad \text{para todo ponto } (x, z) \in \Gamma_g$$

em que o produto do lado direito, refere-se a base quadrática

$$\mathbf{f} = [1 \quad x \quad z \quad xz \quad x^2 \quad z^2] \quad (6)$$

$$\mathbf{a}^T = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6] \quad (7)$$

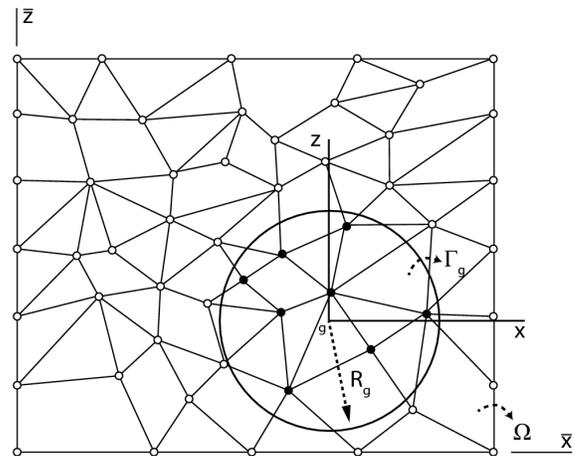


Figure 4: figura de uma malha hipotética ilustrando que o método independe da forma que o domínio é discretizado e que não há restrição para origem do domínio local.

Para o problema de mínimos quadrado, deseja-se encontra  $\mathbf{a}$  que minimize o vetor resíduo  $\varepsilon$  em

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i^e - \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \mathbf{a} = \varepsilon \quad (8)$$

sendo assim, adicionando o peso  $w_i$  em (8) e considerando que

$$\left( \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^T \right) \boldsymbol{\varepsilon} = 0$$

tem-se

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^T \left( \sum_{i=1}^N w_i \mathbf{u}_i^e - \sum_{i=1}^N w_i \mathbf{f}_i \mathbf{a} \right) = \sum_{i=1}^N w_i \mathbf{f}_i^T \boldsymbol{\varepsilon} = 0$$

$$\sum_{i=1}^N w_i \mathbf{f}_i^T \mathbf{u}_i^e = \sum_{i=1}^N w_i \mathbf{f}_i^T \mathbf{f}_i \mathbf{a}$$

$$b_i = M_i \mathbf{a} \quad (9)$$

$$\mathbf{a} = M_i^{-1} b_i \quad (10)$$

em que,

$$M_i = \sum_{i=1}^N w_i \mathbf{f}_i^T \mathbf{f}_i, \quad b_i = \sum_{i=1}^N w_i \mathbf{f}_i^T \mathbf{u}_i^e \quad (11)$$

Observa-se que (11) só terá solução única se tiver pelo menos  $N^c$  nós em  $\Gamma_g$ , em que  $N^c$  é o número de coeficientes em  $\mathbf{a}$ . Para controlar a densidade de nós em  $\Gamma_g$  sabendo que  $\Gamma_g$  é um círculo de área  $S_\Gamma$ , definimos o raio  $R_g$  como sendo,

$$R_g(n, h_{min}) = \alpha(n, h_{min})^{1/2} h_{min}$$

em que

$$\alpha(n, h_{min}) = \frac{n}{\pi h_{min}}$$

sendo  $n = S_\Gamma / h_{min}$ . Como as derivadas são calculadas em cada nó da malha,  $h_{min}$  é opcionalmente a área do menor elemento na vizinhança desse nó. Em todos os resultados  $n$  é tomado igual a 7.0.

## Resultados

Aplicamos as técnicas descritas acima ao problema eletrostático descrito pela equação de Poisson com condições de fronteira de Dirichlet homogênea,

$$-\nabla^2 u(x, z) = h(x, z), \quad (12)$$

no domínio  $0 < x < a, 0 < z < b$ .

A solução analítica de (12) é dada em termos de uma série dupla de Fourier,

$$u(x, z) = \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi z}{b}}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, \quad (13)$$

em que os coeficientes  $A_{mn}$  da séries são dados por

$$A_{mn} = \int_0^a \int_0^b h(x', z') \sin \frac{m\pi x'}{a} \sin \frac{n\pi z'}{b} dz' dx'. \quad (14)$$

Então, as derivadas direcionais são obtidas de,

$$\frac{\partial u(x, z)}{\partial x} = \frac{4\pi}{a^2 b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} m \frac{\cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi z}{b}}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (15)$$

e

$$\frac{\partial u(x, z)}{\partial z} = \frac{4\pi}{ab^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} n \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi z}{b}}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (16)$$

As figura(5) e figura(7) representam a solução analítica e numérica da equação de Poisson sobre um domínio discretizado com 1771 nós. As figuras (14) e (15) contêm as derivadas correspondentes a essa discretização. Os resultados que serão mostrados em seguida, estão ao longo da reta  $z = 1$ . Algumas das curvas de erro relativo estão apresentadas de forma descontínuas devido ao alto valor do erro relativo naquele nó em  $z = 1$ , pois não nos permitiria observar a amplitude do erro ao longo da curva. Contudo, o valor deste erro será mencionado. Além disso, nas figuras que seguem, as legendas, DA, MG e MQMP representam as derivadas analítica, por média dos gradientes das funções base e por ajuste móvel respectivamente. As legendas EMG e EMQMP são seus respectivos erros relativos.

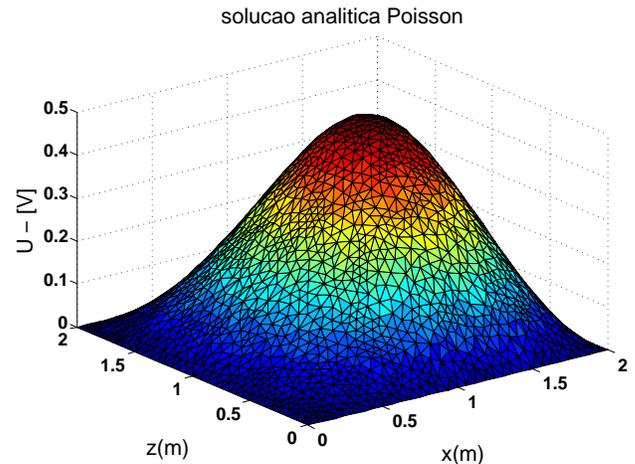


Figure 5: Solução analítica da equação de Poisson

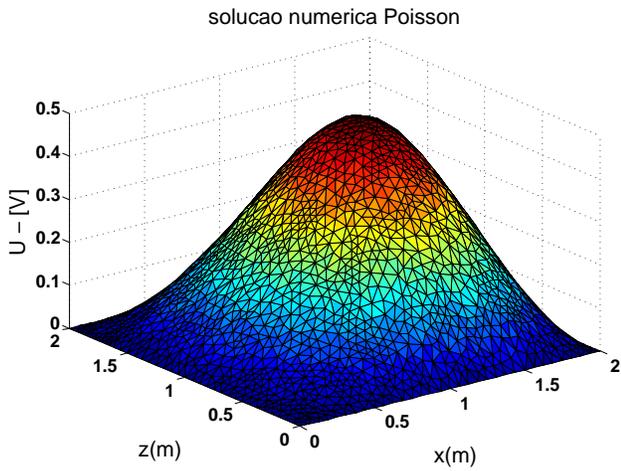


Figure 6: Solução numérica da equação de Poisson

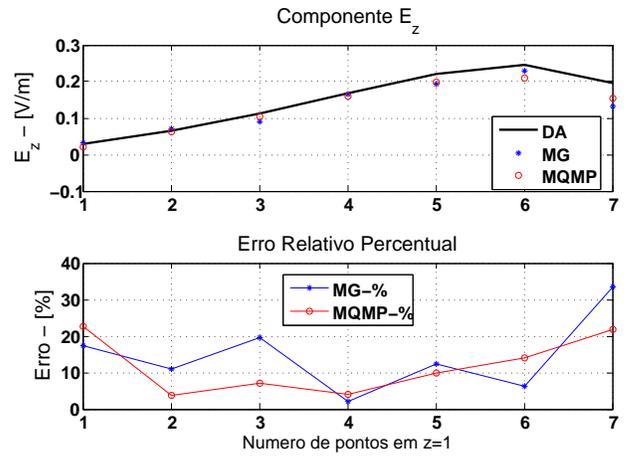


Figure 9: Discretização em 78 nós globais, componente  $E_z$ .

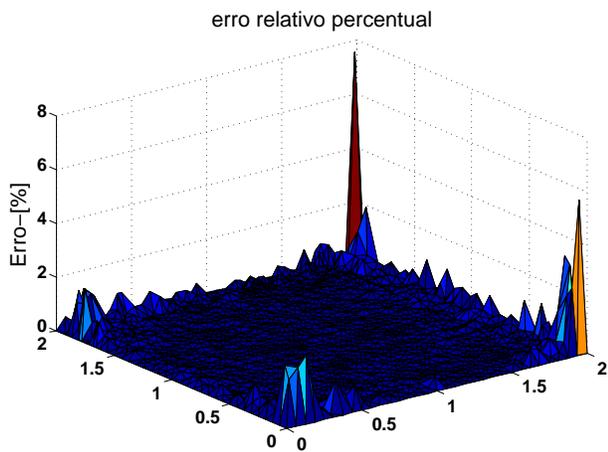


Figure 7: Erro relativo da solução numérica. Discretização em 1771 nós globais

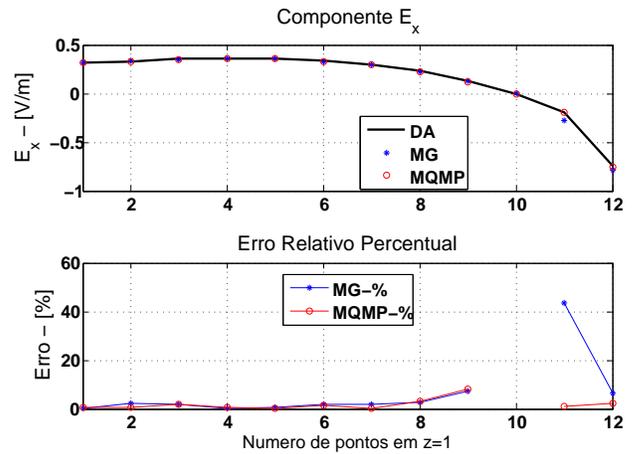


Figure 10: Discretização em 173 nós globais, componente  $E_x$ . Em  $N = 10$  EMG= 231 e EMQMP= 87.

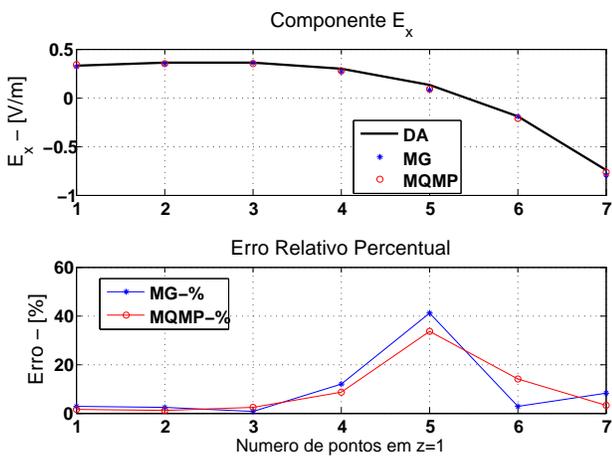


Figure 8: Discretização em 78 nós globais, componente  $E_x$ .

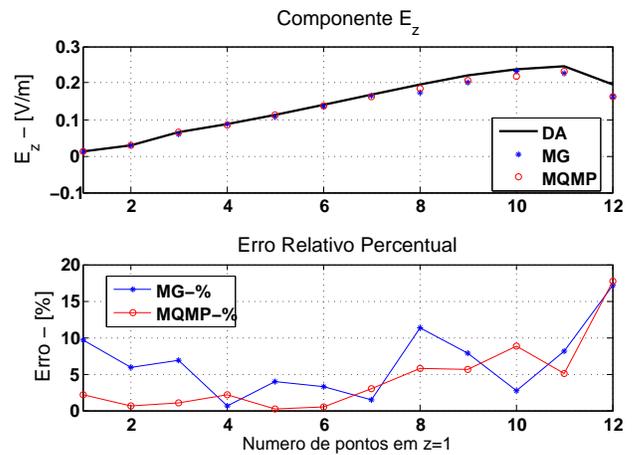


Figure 11: Discretização em 173 nós globais, componente  $E_z$ .

Os resultados mostrados da figura (8) à (15) foram obtidos a partir de sucessivos refinamentos no domínio global  $\Omega$ . Observando os resultados, nota-se que o ajuste móvel por mínimos quadrados ponderados se mostrou mais eficiente que a média dos gradientes, este fato é traduzido pela redução do erro relativo a medida que a malha é refinada. Entretanto, ambos os métodos mostraram debilidades. Ou seja, as derivadas calculadas em regiões perto da fronteira e onde o campo é zero ou próximo de zero, apresentaram erros relativos elevados. Contudo, mesmo para essas regiões, o ajuste móvel exibe uma aproximação mais efetiva e mais regular.

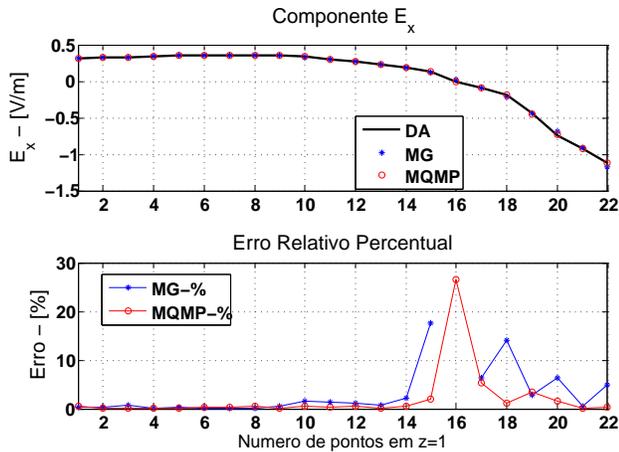


Figure 12: Discretização em 810 nós globais, componente  $E_x$ . Em  $N = 16$  EMG= 685.

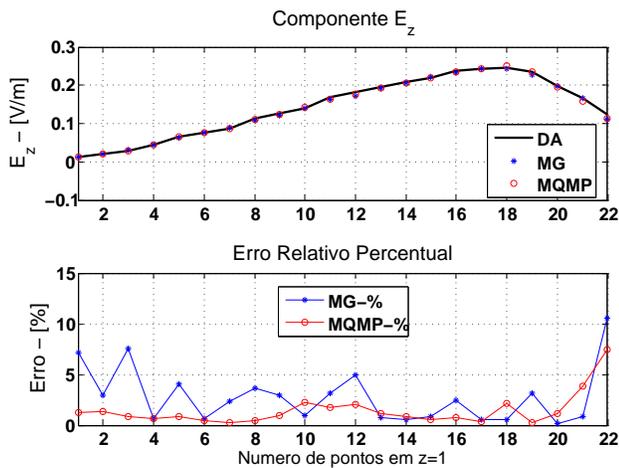


Figure 13: Discretização em 810 nós globais, componente  $E_z$ .

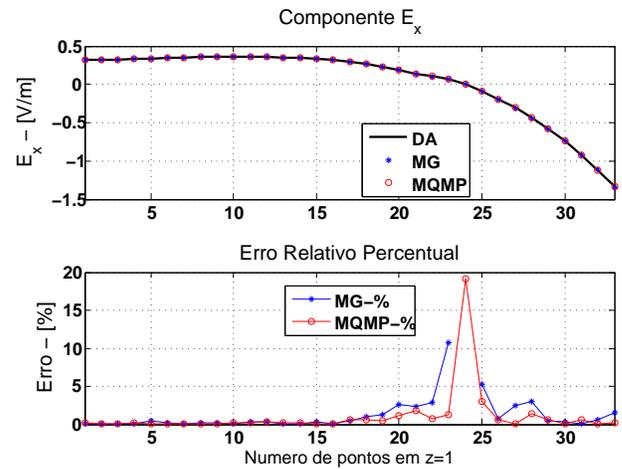


Figure 14: Discretização em 1771 nós globais, componente  $E_x$ . Em  $N = 24$  EMG= 150.

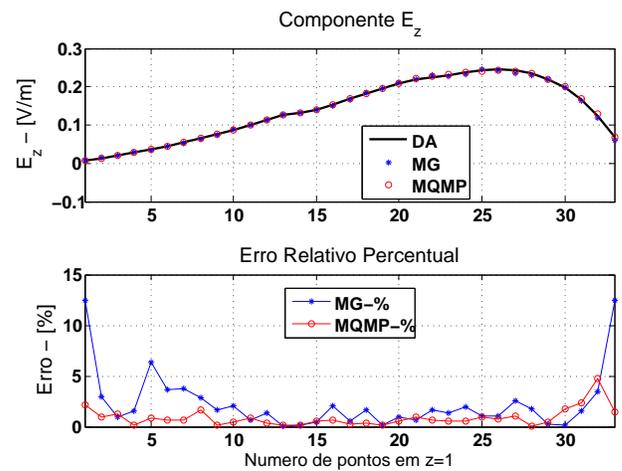


Figure 15: Discretização em 1771 nós globais, componente  $E_z$ .

### Summary, Comments and Conclusions

Apresentou-se neste trabalho dois métodos para calcular numericamente as derivadas 2D, média aritmética do gradiente das funções base (MAGFB) e ajuste móvel por mínimos quadrados ponderado (AMMQP). Os algoritmos para calcular as derivadas foram validados a partir da solução analítica da equação de Poisson.

Foi possível notar que os dois métodos, mostram efetiva melhora nos resultados a partir de sucessivos refinamentos sobre a malha. Entretanto, as debilidades inerentes as técnicas é revelada pelo erro relativo em pontos na fronteira e onde o campo é zero, tais debilidades também mostraram ser contornáveis com maior refinamento, em que se tratando de malha não estruturada, pode ser local. Contudo, a curva do erro associada ao ajuste móvel se mostrou menos discrepante ao longo dos resultados. Uma vantagem pertinente do AMMQP em relação a MAGFB é que, as derivadas podem ser mais confiavelmente atribuídas à pontos arbitrários da malha. Além disso, vale lembra que o método é facilmente aplicado a elementos de geometria distinta, triângulos, quadrados, entre outros.

### References

Melo, P. E. M. Novos Métodos para filtragem de dados sísmicos de reflexão. 2007. 79 f. Dissertação (Doutorado em geofísica) – Universidade Federal da Bahia, Salvador – BA, 2007.

Rijo, L. : Teoria os métodos elétricos e Eletromagnéticos I e II. BÉlem-PA, 2008. Notas de aulas.

Shewchuk, J. R.,. 2013, A two-Dimensional Quality Mesh Generator And Delaunay. (Disponível em <http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html>).

Xu, S. Z., Zhao, S. K.,. Two-Dimensional Magnetotelluric Modelling by the Boundary Element Method. Journal of geomagnetism and geoelectricity, 39: p. 677 - 698, 1987.

Tabbara, M. et al. Finite element derivative recovery by moving least square interpolants. Computer Methods in Mechanics and Engineering, 117: p. 211-223, 1994.

### Acknowledgments

agradeço ao PRHANP-06 por subsidiar este trabalho, e ao Prof.Dr. Cícero Roberto Teixeira Régis pelas orientações.